

LV олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР

Таллинн, 8 января 2008 года

XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. При каком значении параметра a угол между касательными к графикам функций $f(x) = x^2 + 3x + 4$ и $g(x) = x^2 - x + a$, проведёнными в точке пересечения парабол равен $\frac{\pi}{4}$?

2. Первый, второй и 2008-ой члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Докажи, что 2007-ой член прогрессии является также натуральным числом.

3. Реши логарифмическое уравнение $3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(17x - \frac{4}{x} \right)$.

4. В круге единичного радиуса проведены две хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \frac{10}{7}$. Найди площадь той части круга, которая заключена между сторонами угла ABC , если известно, что угол BAC является острым.

5. 2008 гирь расположены в ряд. Известно, что массы любых двух соседних гирь различаются ровно на один грамм. Докажи, что гири можно расположить на двух чашах чашечных весов так, что на обеих чашах было бы по 1004 гири и чашечные весы находились бы в равновесии.